円と接線に関する問題

問題　座標平面上に，円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と点 Q$(1,\ 2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3,\ 0)$ とし，x 軸上の点 P_2，P_3，…… を以下の条件によって決め，P_n の座標を $(p_n,\ 0)$ とする。点 P_n から円 C に接線を引き，その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき，3 点 Q，T_n，P_{n+1} は同一直線上にある。$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$　　(2014，千葉大学)

(1)　点 T_1 の座標を求めよ。　(2)　点 P_2 の座標を求めよ。

(3)　点 T_n の座標を p_n の式で表せ。　(4)　点 P_n の座標を n の式で表せ。

解答　(1)　点 T_n の座標を $(s_n,\ t_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とし，

点 T_1 における円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ の接線方程式は

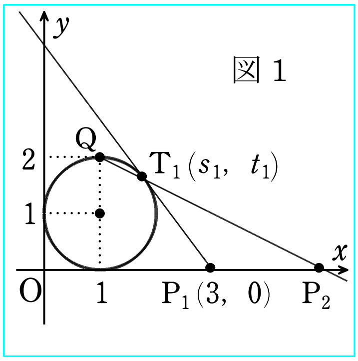
$$(s_1-1)(x-1)+(t_1-1)(y-1)=1$$

この直線が $\mathrm{P}_1(3,\ 0)$ を通るから　$2(s_1-1)-(t_1-1)=1$

$\Longrightarrow$　$t_1=2s_1-2$　…… ①，点 T_1 は円 C 上にあるから

$(s_1-1)^2+(t_1-1)^2=1$　…… ②，　① を ② に代入して

$(s_1-1)^2+(2s_1-3)^2=1$，整理して，$(s_1-1)(5s_1-9)=0$，



① より $s_1=1$ のとき $t_1=0$，　$s_1=\dfrac{9}{5}$ のとき　$t_1=\dfrac{8}{5}$　，$t_1>0$ より，$\underline{\mathrm{T}_1\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)}$ 答

(2)　(1) の結果より，直線 QT_1 の方程式は，　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$，　$y=0$ として $x=5$

　　したがって，点 P_2 の座標は　$\underline{(5,\ 0)}$ 答

(3)　点 T_n における円 C の接線の方程式は，$(s_n-1)(x-1)+(t_n-1)(y-1)=1$，

P_n $(p_n,\ 0)$ を通るから　$(s_n-1)(p_n-1)-(t_n-1)=1$　$\Longleftrightarrow$　$t_n=(s_n-1)(p_n-1)$　…… ③

点 T_n は円 C 上にあり，$(s_n-1)^2+(t_n-1)^2=1$ …… ④

③ を ④ に代入して　整理すると　$(p_n{}^2-2p_n+2)s_n{}^2-2(p_n{}^2-p_n+1)s_n+p_n{}^2=0$

$\Longleftrightarrow(s_n-1)\{(p_n{}^2-2p_n+2)s_n-p_n{}^2\}=0$，　$s_n=\dfrac{p_n{}^2}{p_n{}^2-2p_n+2}$ のとき　$t_n=\dfrac{2(p_n-1)^2}{p_n{}^2-2p_n+2}$

$(\because t_n>0)$，　したがって，点 T_n の座標は　$\underline{\left(\dfrac{p_n{}^2}{p_n{}^2-2p_n+2},\ \dfrac{2(p_n-1)^2}{p_n{}^2-2p_n+2}\right)}$ 答

(4)　(3) の結果より，直線 QT_n の方程式は

$$y-2=\frac{\dfrac{2(p_n-1)^2}{p_n{}^2-2p_n+2}-2}{\dfrac{p_n{}^2}{p_n{}^2-2p_n+2}-1}(x-1)\quad\Longleftrightarrow\quad y-2=-\frac{1}{p_n-1}(x-1),\quad y=0 \text{ として }\quad x=2p_n-1,$$

$p_{n+1}=2p_n-1\Longleftrightarrow p_{n+1}-1=2(p_n-1)$，$\{p_n-1\}$ は初項 $p_1-1=2$，公比 2 の等比数列で，

$p_n-1=2\cdot2^{n-1}=2^n$，ゆえに　$p_n=2^n+1$，　点 P_n の座標は　$\underline{(2^n+1,\ 0)}$ 答

山脇の超数学講座 No. 81

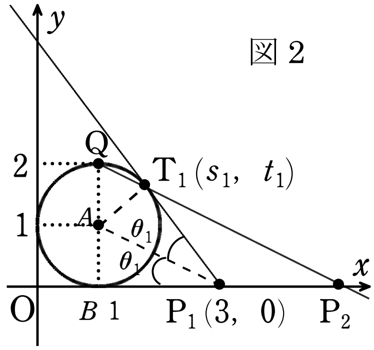


図 2

別解 1　図 2 のように, $A(1,1)$, $B(1,0)$とし, $P_1B=P_1T_1=2$, $\angle AP_1B=\angle AP_1T_1=\theta_1$とおくと, $AP_1=\sqrt{5}$,

$\cos\theta_1=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ より, $\cos 2\theta_1=\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$,

$\sin 2\theta_1=\dfrac{4}{5}$, よって, $s_1=3-2\cos 2\theta_1=\dfrac{9}{5}$, $t_1=\dfrac{8}{5}$

(1) $T_1\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$ 答　　(2) $P_2(p_2,\ 0)$ だから,

$2:\dfrac{8}{5}=(p_2-1):\left(p_2-\dfrac{9}{5}\right)$, $5\left(p_2-\dfrac{9}{5}\right)=4(p_2-1)$ より, $P_2(5,\ 0)$ 答

(3) 同様の計算を P_n, T_n に対しておこなうと, $P_nB=P_nT_n=p_n-1$, $\angle AP_nB=\angle AP_nT_n=\theta_n$,

$AP_n=\sqrt{(p_n-1)^2+1^2}=\sqrt{p_n{}^2-2p_n+2}$, $\cos\theta_n=\dfrac{p_n-1}{\sqrt{p_n{}^2-2p_n+2}}$, $\sin\theta_n=\dfrac{1}{\sqrt{p_n{}^2-2p_n+2}}$

$\cos 2\theta_n=\dfrac{p_n{}^2-2p_n}{p_n{}^2-2p_n+2}$, $\sin 2\theta_n=\dfrac{2(p_n-1)}{p_n{}^2-2p_n+2}$, ゆえに, $t_n=P_nT_n\sin 2\theta_n$,

$s_n=p_n-P_nT_n\cos\theta_n=p_n-\dfrac{(p_n-1)(p_n{}^2-2p_n)}{p_n{}^2-2p_n+2}=\dfrac{p_n{}^2}{p_n{}^2-2p_n+2}$, $T_n\left(\dfrac{p_n{}^2}{p_n{}^2-2p_n+2},\ \dfrac{2(p_n-1)^2}{p_n{}^2-2p_n+2}\right)$ 答

(4) $2:t_n=(p_{n+1}-1):(p_{n+1}-s_n) \iff p_{n+1}(p_n{}^2-2p_n+2)-p_n{}^2=(p_n-1)^2p_{n+1}-(p_n-1)^2$

$\iff p_{n+1}=2p_n-1 \iff p_{n+1}-1=2(p_n-1)$, よって, $p_n-1=2^n$, $P_n(2^n+1,0)$ 答

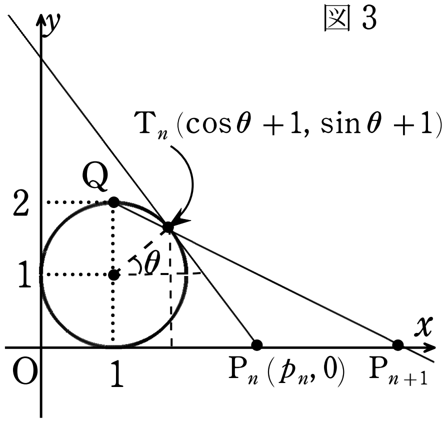


図 3

別解2 [(4)のみ] $T_n(\cos\theta+1, \sin\theta+1)$ と置くことができる。

$\sin\theta+1=(p_n-1)\cos\theta \iff p_n=\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta}+1$

一方, $2:(\sin\theta+1)=(p_{n+1}-1):(p_{n+1}-\cos\theta-1) \iff$

$p_{n+1}=\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin\theta}+1=\dfrac{2\cos\theta(\sin\theta+1)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}+1$

$=\dfrac{2(\sin\theta+1)}{\cos\theta}+1=2(p_n-1)+1=2p_n-1$ (以下同じ)

解説　解答は, 忠実に座標平面上の円に対する接線の方程式の公式を使って T_n, P_{n+1} の座標を求め, p_n に関する漸化式を導いている。それに対して, 別解1では, 定点から円に引いた接線の長さが等しいことを利用して, 三角関数を利用しながら, 平行線の性質を利用して T_n, P_{n+1} の座標を求めている。さらに, それを簡素にしたのが 別解2 である。ここでは円の媒介変数としてθを設定し, p_n からダイレクトに p_{n+1} を求めている。別解2 の方が等比数列になる秘密に迫っている。三角関数の利点が示された良問である。(終)